CIĄGI

CIĄG ARYTMETYCZNY- ciąg liczb, w którym każda kolejna liczba różni się od poprzedniej o ustaloną wartość r. Liczbę r nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego.

- Wzór na $n-ty$ wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r;

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Przykłady:

$$a_1 = 2, r = 3 \qquad 2,5,8,11,14, \dots \dots$$
$$a_1 = -4, r = 2 \qquad -4, -2,0,2,4, \dots \dots$$

- Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot n,$$

albo

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n.$$

- Związek między kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego(!!!!):

$$x, y, z - \text{kolejne wyrazy}$$
$$y = \frac{x+z}{2}$$

Zadania dotyczące ostatniej własności bardzo często pojawiają się na maturze.

Zadanie: *Wyznacz x, jeżeli liczby $x-3{,}5, x+7$ są pierwszym, drugim, trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego.*

Rozwiązanie:

$$x - 3{,}5, x + 7$$

Korzystam z własności ciągu arytmetycznego

$$5 = \frac{x - 3 + x + 7}{2}$$
$$10 = x - 3 + x + 7$$
$$x = 3$$

https://www.matemaks.pl/ciag-arytmetyczny.html

https://pistacja.tv/wideolekcje/matematyka/szkola-ponadpodstawowa/ciagi/plmat125-ciag-arytmetyczny

CIĄG GEOMETRYCZNY- ciąg liczb, w którym każdy kolejny wyraz powstaje po pomnożeniu poprzedniego wyrazu przez iloraz q.

- Wzór na $n-ty$ wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q;

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2$$

Przykłady:

$$a_1 = 3, q = 2 \qquad 3,6,12,24,48, \dots \dots$$

$$a_1 = -2, q = -4 \qquad -2,8,-32,128,-512 \dots \dots$$

$$a_1 = 9, q = \frac{1}{3} \qquad 9,3,1,\frac{1}{3}, \dots$$

- Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, dla\ q \neq 1$$

$$S_n = n \cdot a_1, \quad dla\ q = 1$$

- Związek między kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego (!!!!):

$$x, y, z - \text{kolejne wyrazy}$$

$$y^2 = x \cdot z$$

Zadania dotyczące ostatniej własności bardzo często pojawiają się na maturze.

Zadanie: *Wyznacz x, jeżeli liczby $3,8,5x-2$ są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego.*

Rozwiązanie:

$$3,8,5x-2$$

Korzystam w własności ciągu geometrycznego.

$$8^2 = 3 \cdot (5x-2)$$

$$64 = 15x - 6$$

$$15x = 70$$

$$x = \frac{70}{15} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

https://www.matemaks.pl/ciag-geometryczny.html

https://pistacja.tv/wideolekcje/matematyka/szkola-ponadpodstawowa/ciagi/plmat126-ciag-geometryczny

Rozwiązując zadania korzystaj z tablic matematycznych!!!!

ZADANIA POWÓRZENIOWE

I. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$.

II. Ile wyrazów dodatnich ma ciąg (a_n)? Podaj największy z nich.

$$\boldsymbol{a_n = 13 - 3n}$$

III. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zeru?

$$\boldsymbol{a_n = n^2 + n - 6}$$

IV. Wyznacz wzór ogólny podanego ciągu arytmetycznego (a_n) . Oblicz jego trzynasty wyraz.

$$0,4,8,12, \dots\dots$$

V. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n).

$$a_4 = -5, a_7 = -4$$

VI. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n), jeśli:

$$\boldsymbol{a_1 + a_2 = 11}$$
$$\boldsymbol{a_3 + a_4 = 31}$$

VII. **a)** Liczby $x - 4{,}5, x + 12$ tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz x.
b) Liczby $6, x, y, z, 9$ tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz x, y, z.

VIII. Oblicz $3 + 6 + 9 + \cdots . +96$

IX. Dane są trzy początkowe wyrazy ciągu geometrycznego (a_n). Dopisz trzy kolejne wyrazy tego ciągu i wyznacz jego wzór ogólny.
a) $3, -6, 12, \dots\dots$
b) $27, 18, 12, \dots\dots$

X. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n)
a) $a_1 = -3, a_2 = 24$
b) $a_3 = 9, a_4 = 6$

XI. Dany jest ciąg geometryczny (a_n). Oblicz a_1, q *oraz* a_4.

$$a_n = -2 \cdot 3^n$$

XII. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), jeżeli:

$$a_1 = 4, 2a_5 = 3a_4, n = 5$$

ZADANIA MATURALNE 2015-2019

1. *W rosnącym ciągu geometrycznym* (a_n), *określonym dla* $n \geq 1$, *spełniony jest warunek* $a_4 = 3a_1$. *Iloraz* q *tego ciągu jest równy*

A. $q = \frac{1}{3}$ **B.** $q = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ **C.** $q = \sqrt[3]{3}$ **D.** $q = 3$

2. *W ciągu arytmetycznym* (a_n) *określonym dla* $n \geqslant 1$ *dane sa* $a_1 = -4$ *i* $r = 2$. *Którym wyrazem tego ciągu jest liczba* 156?

A. 81 **B.** 80 **C.** 76 **D.** 77

3. *Ciąg geometryczny* (a_n) *jest określony wzorem* $a_n = 2^n$ *dla* $n \geqslant 1$. *Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa*

A. $2(1 - 2^{10})$ **C.** $2(1 + 2^{10})$
B. $-2(1 - 2^{10})$ **D.** $-2(1 + 2^{10})$

4. *Czternasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy* 8, *a różnica tego ciągu jest równa* $\left(-\frac{3}{2}\right)$. *Siódmy wyraz tego ciągu jest równy*

A. $\frac{37}{2}$ **B.** $-\frac{37}{2}$ **C.** $-\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

5. *Ciąg* $(x, 2x + 3{,}4x + 3)$ *jest geometryczny. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy*

A. -4 **B.** 1 **C.** 0 **D.** -1

6. *W ciągu arytmetycznym* (a_n) *określonym dla* $n \geqslant 1$, *dane są:* $a_1 = 5, a_2 = 11$. *Wtedy*

A. $a_{14} = 71$ **B.** $a_{12} = 71$ **C.** $a_{11} = 71$ **D.** $a_{10} = 71$

7. *Dany jest trzywyrazowy ciąg geometryczny* $(24, 6, a - 1)$. *Stąd wynika, że*

A. $a = \frac{5}{2}$ **B.** $a = \frac{2}{5}$ **C.** $a = \frac{3}{2}$ **D.** $a = \frac{2}{3}$

8. *W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geqslant 1$, dane są dwa wyrazy:$a_1 = 7$ i $a_8 = -49$. Suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa*

A. -168 **B.** -189 **C.** -21 **D.** -42

9. *Dany jest ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geqslant 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie i spełniony jest warunek $\frac{a_5}{a_3} = \frac{1}{9}$. Iloraz tego ciągu jest równy*

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** 3 **D.** $\sqrt{3}$

10. *Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{5-2n}{6}$ dla $n \geqslant 1$. Ciąg ten jest*

A. *arytmetyczny i jego różnica jest równa $r = -\frac{1}{3}$*
B. *arytmetyczny i jego różnica jest równa $r = -2$*
C. *geometryczny i jego iloraz jest równa $q = -\frac{1}{3}$*
D. *geometryczny i jego iloraz jest równa $q = \frac{5}{6}$*

11. *Dla ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geqslant 1$, jest spełniony warunek $a_4 + a_5 + a_6 = 12$. wtedy*

A. $a_5 = 4$ **B.** $a_5 = 3$ **C.** $a_5 = 6$ **D.** $a_5 = 5$

12. *Dany jest ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geqslant 1$, w którym $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = 2\sqrt{2}$, $a_3 = 4\sqrt{2}$. Wzór na $n-ty$ wyraz tego ciągu ma postać*

A. $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n$
B. $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$
C. $a_n = \frac{(\sqrt{2})^n}{2}$
D. $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

13. Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony wzore, $a_n = 2n - 1$,dla $n \geqslant 1$. Suma stu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu jest równa

A. 9900 **B.** 9950 **C.** 10000 **D.** 10050

14. Ciąg $x + 35, x - 10, x + 20$ jest geometryczny. Stąd wynika, że

A. $x = -8$ **B.** $x = -1$ **C.** $x = 5$ **D.** $x = 15$

15. Dany jest ciąg geometryczny , w którym $a_1 = 72$ i $a_4 = 9$. Iloraz q tego ciągu jest równy

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{8}$

16. Dany jest ciąg geometryczny $(x, 2x^2, 4x^3, 8)$ o wyrazach nieujemnych. Wtedy

A. $x = 0$ **B.** $x = 1$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = 4$

17. Dany jest ciąg arytmetyczny, o którym wiemy, że $a_1 = 2$ i $a_2 = 9$. Wtedy $a_n = 79$

A. $n = 10$ **B.** $n = 11$ **C.** $n = 12$ **D.** $n = 13$

18. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 8, a czwarty wyraz tego ciągu jest równy (-216). Iloraz tego ciągu jest równy

A. $-\frac{224}{3}$
B. -3
C. -9
D. -27

19. Ciąg $(27,18, x + 5)$ jest geometryczny. Wtedy

A. $x = 4$ **B.** $x = 5$ **C.** $x = 7$ **D.** $x = 9$

20. Ciąg (a_n) określony dla $n \geq 1$ jest arytmetyczny oraz $a_3 = 10$, $a_4 = 14$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. $a_1 = -2$ **B.** $a_1 = 2$ **C.** $a_1 = 6$ **D.** $a_1 = 12$

21. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Wówczas wyraz a_5 tego ciągu jest równy

A. $-\frac{3}{25}$ **B.** $\frac{3}{25}$ **C.** $-\frac{7}{25}$ **D.** $\frac{7}{25}$

22. Dany jest ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_1 = -\sqrt{2}, a_2 = 2, a_3 = -2\sqrt{2}$. Dziesiąty wyraz tego ciągu, czyli a_{10}, jest równy

A. 32 **B.** -32 **C.** $16\sqrt{2}$ **D.** $-16\sqrt{2}$

23. Miary czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $20°$. Najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę

A. $40°$ **B.** $50°$ **C.** $60°$ **D.** $70°$

24. (5 pkt) W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu, jest równa 12. Wyrazy a_1, a_3, a_k ciągu (a_n), w podanej kolejności, tworzą nowy ciąg – trzywyrazowy ciąg geometryczny (b_n). Oblicz k.

25. (2 pkt) Dany jest skończony ciąg, w którym pierwszy wyraz jest równy 444, a ostatni jest równy 653. Każdy wyraz tego ciągu, począwszy od drugiego jest o 11 większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

26. (2 pkt) W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geqslant 1$ dane są: wyraz $a_1 = 8$ i suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu $S_3 = 33$. Oblicz różnice $a_{16} - a_{13}$.

27. (2 pkt) Dwunasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geqslant 1$, jest równy 30, a suma jego dwunastu początkowych wyrazów jest równa 162. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

28. (4 pkt) Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, 42, y, z)$ jest geometryczny. Oblicz x, y, z.

29. (2 pkt) W skończonym ciągu arytmetycznym (a_n) pierwszy wyraz a_1 tego ciągu jest równy 7 oraz ostatni wyraz a_n jest równy 89. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 2016. Oblicz, ile wyrazów ma ten ciąg

30. (2 pkt) Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

31. (2pkt) Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2 + 2n$ dla $n \geqslant 1$. Wykaż, że suma każdy dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

32. (4 pkt) Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$. Różnicą tego ciągu jest liczba $r = -4$, a średnia arytmetyczna początkowych sześciu wyrazów tego ciągu $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ jest równa 16.

a) Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.
b) Oblicz liczbę k dla której $a_k = -78$.